№ 8-дәріс.

Тақырыбы: Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Реті төмендетілетін жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер.

Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулердің негізгі түрлері және оны интегралдау әдістері.

$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ **түріндегі теңдеу.**

Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі түрлерін қарастырамыз.

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

- бұл дифференциалдық теңдеудің құрамына ізделініп отырған y функциясы мен оның (k-1)-ретке дейінгі туындылары кірмейді.Бұл жағдайда, ретін төмендету мына ауыстыру көмегімен жүзеге асырылады: $y^{(k)} = z, y^{(k+1)} = z', ..., y^{(n)} = z^{(n-k)}$

Мысал 1. $y''' - y'' = 0 \Rightarrow \left| y'' = z, y''' = z' \right| \Rightarrow z' - z = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = C_1 e^{\int dx} = C_1 e^x \Rightarrow y'' = C_1 e^x \Rightarrow y' = \int C_1 e^x dx + C_2 = C_1 e^x + C_2 \Rightarrow$$

$$y = \int \left[C_1 e^x + C_2 \right] dx \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 x + C_3$$

Мысал 2. Коши есебін шеш:

$$xy'' - y' - x \sin \frac{y'}{x} = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Шешуі. берілген теңдеу (1) түріндегі теңдеуге жатады. Жаңа функция $y' = p, \ y'' = p'$ енгіземіз, теңдеудің екі жағын да x -ке бөліп, берілген теңдеу мына түрге келеді: $p' - \frac{p}{x} - \sin \frac{p}{x} = 0$ немесе $p' = \frac{p}{x} + \sin \frac{p}{x}$. Теңдіктің оң жағы $\frac{p}{x} + \sin \frac{p}{x}$ -нөлінші ретті біртекті функция, ендеше бұл біртекті дифференциалдық теңдеу. $p = zx, \ p' = z'x + z$ ауыстыруын жасаймыз. Онда $z'x + z - z - \sin z = 0$,яғни, $z'x - \sin z = 0$ теңдеуін шешеміз. Айнымалыларды ажырату арқылы: $\frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$ $\ln \left| tg \frac{z}{2} \right| = \ln x + \ln c_1$, $tg \frac{z}{2} = xc_1$, $z = 2 arctgxc_1$. Теңдеудегі z -тің орнына жоғарыдағы ауыстыруларды қоятын болсақ: $p = zx, \ z = \frac{y'}{x}$, онда $y' = 2xarctgxc_1 \rightarrow \int dy = \int 2xarctgxc_1 dx$. Ары қарай бөліктеп интегралдасақ: $U = arctgxc_1, \ dU = \frac{c_1 dx}{1 + (xc_1)^2}, \ dV = 2xdx, \ V = x^2$,

$$y = x^2 arctgxc_1 - \int \frac{c_1 x^2}{1 + (xc_1)^2} dx = x^2 arctgxc_1 - \frac{1}{c_1} \int \frac{1 + c_1^2 x^2 - 1}{1 + (xc_1)^2} dx =$$

$$= x^2 arctgxc_1 - \frac{1}{c_1} x + \frac{1}{c_1^2} arctgxc_1 + c_2 = \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2} \right) arctgxc_1 - \frac{1}{c_1} x + c_2$$ аламыз.

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = x^2 arctgxc_1 - \frac{1}{c_1} x + \frac{1}{c_1^2} arctgxc_1 + c_2$$ немесе

$$y = \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2} \right) arctgxc_1 - \frac{1}{c_1} x + c_2.$$

Теңдеудің дербес шешімін табу үшін бірінші табылған функцияның туындысын табамыз:

$$y' = 2xarctgxc_1 + \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2}\right)\cdot\frac{c_1}{1+x^2c_1^2} - \frac{1}{c_1}.$$

Берілген $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = \frac{\pi}{2}$ бастапқы шартты ескерсек:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} = \left(1^2 + \frac{1}{c_1^2}\right) arctg\ 1\cdot c_1 - \frac{1}{c_1}\cdot 1 + c_2 \\ \\ \frac{\pi}{2} = 2\cdot 1\cdot arctg\ (1\cdot c_1) + \left(1^2 + \frac{1}{c_1^2}\right)\cdot\frac{c_1}{1+1^2c_1^2} - \frac{1}{c_1} \end{cases}$$

Жүйенің соңғы теңдеуінен c_1 тұрақтысын анықтаймыз:

$$\frac{\pi}{2} = 2arctgc_1 + \frac{c_1^2+1}{c_1^2}\cdot\frac{c_1}{1+1^2c_1^2} - \frac{1}{c_1}, \qquad arctgc_1 = \frac{\pi}{4} \quad => \quad c_1 = 1.$$

Бірінші теңдеуден c_2 тұрақтысын анықтаймыз:

$$\frac{\pi}{2} = \left(1^2 + \frac{1}{1^2}\right) arctg\ 1 - \frac{1}{1}\cdot 1 + c_2, \quad \frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{4} - 1 + c_2, \quad c_2 = 1.$$

Сонымен, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$.

Ендеше, ізделінді дербес шешім:

$$y = \left(x^2 + 1\right)arctgx - x + 1.$$

$F(y, y',..., y^{(n)}) = 0$ түріндегі теңдеу.

$$F(y, y',..., y^{(n)}) = 0 \qquad (2)$$

түріндегі дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз. Бұл жоғарғы ретті бұл теңдеудің түріне тәуелсіз айнымалы x кірмейді. Бұл жағдайда мынадай белгілеу енгіземіз: $y' = \frac{dy}{dx} = p$. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесін қолданып, мына теңдіктерді аламыз:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy} + p\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dy} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2},\ldots \quad .$$

Дәл осылай, одан да жоғарғы ретті туындыларын тауып, орнына қойсақ $y^{(k)}$ туындылары *p=p(y)* функциясының y -тен тәуелді *k-1* реттен аспайтын туындылары арқылы өрнектелетіні анық, бұл теңндеудің иретін бір санға келтіруге мүмкіндік тудырады. Бұл жағдайды мысал көмегімен қарастырып көрелік.

Мысал 3. $yy'' - (y')^2 = y'$ теңдеуін шеш.

Шешуі. Жаңа функция енгіземіз: $y' = p$; $y'' = p'_y\cdot p$, онда

$$yp\,p' - p^2 = p \Rightarrow p' - \frac{1}{y}p = \frac{1}{y} \Rightarrow p = e^{\int\frac{dy}{y}}\cdot\left(C_1 + \int\frac{1}{y}\cdot e^{-\int\frac{dy}{y}}dy\right) =$$

$$= y\left(C_1 + \int \frac{dy}{y^2}\right) = y\left(C_1 - \frac{1}{y}\right) = C_1 y - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 y - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{C_1 y - 1} = dx \Rightarrow \frac{1}{C_1} \cdot \ln\left|C_1 y - 1\right| = x + C_2 .$$

Мысал 4. $y'' - 2yy' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін тап.

Шешуі. Теңдеуді шешу үшін, жаңа функция енгіземіз $p(y) = y'$. Онда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \quad , \quad p\frac{dp}{dy} - 2yp = 0 \ , \quad \frac{dp}{dy} - 2y = 0 \ , \ p = y^2 + c_1^2 ,$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + c_1^2 , \quad \int \frac{dy}{y^2 + c_1^2} = \int dx \ , \ \frac{1}{c_1} arctg \frac{y}{c_1} = x + c_2 \ , \ arctg \frac{y}{c_1} = c_1 x + c_2 c_1 .$$

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі:
$y = c_1 tg\left(c_1 x + \overline{c}_2\right)$, мұндағы $\overline{c}_2 = c_2 c_1$

$y^{(n)} = f(x)$ түріндегі теңдеу.

$y^{(n)} = f(x)$ түріндегі, яғни, оң жағы тек x айнымалысына ғана тәуелді болатын дифференциалдық теңдеуді қарастырайық.

Онда $y = \int\int \ldots \int f(x)dxdx \ldots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n$ - теңдеудің жалпы шешімі.

Мысал 5. $xy''' = 2x + 3$ теңдеуінің жалпы шешімін тап.

Шешуі. Алдымен теңдеуді (1) түріне келтіреміз:

$$y''' = \frac{2x + 3}{x}$$

(2) формулаға сәйкес біртіндеп интегралдасақ:

$$y'' = \int \frac{2x + 3}{x} dx = \int \left(2 + \frac{3}{x}\right) dx = 2x + 3 \ln x + C_1 ,$$

$$y' = \int \left(2x + 3 \ln x + C_1\right) dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, \ du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \ v = x_1 \end{matrix} \right| = x^2 + 3x \ln x - 3x + Cx_1 + C_2 .$$

$$y = \int \left(x^2 + 3x \ln x - 3x + + Cx_1 + C_2\right) dx = \frac{x^3}{3} + 3\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x}\right) - \frac{3x^2}{2} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 =$$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^2}{2} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \ln x + \overline{C_1} \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$, мұндағы $\overline{C_1} = \frac{C_1}{2} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2}$.

Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер. Теңдеулер шешімінің жалпы құрылымы.

Анықтама 1. n - ші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеу деп мына түрдегі теңдеуді айтамыз:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (1)$$

мұндағы $a_i = a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ теңдеудің коэффиценттері, қандай да кесіндіде үзіліссіз функциялар.

Теңдеудің оң жағы $L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$ сызықтық оператор деп аталады. $L[y_1 \pm y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2]$ және $L[Cy] \equiv CL[y]$ теңдігі орындалатынына оңай көз жеткізуге болады, $C - const$.

Теорема 1 (Пикар). Қандай да бір D облысының барлық нүктелерінде үзіліссіз болатын $a_i = a_i(x),\ i = \overline{1,n}$ және $f(x)$ функциялары үшін (1) Коши есебінің тек жалғыз ғана шешімі табылады.

Ары қарай, біз $a_i = a_i(x),\ i = \overline{1,n}$ және $f(x)$ функцияларын D облысында үзіліссіз деп қарастырамыз.

1. Сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

$$L[y] = 0 \tag{2}$$

Анықтама 2. $y_1, y_2, \ldots, y_m$ функциялары $(a;b)$ аралығында сызықты тәуелді деп аталады, егер төмендегі теңдеуді қанағаттандыратын барлығы бірдей нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, тұрақтылары табылатын болса:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m = 0\ , \qquad \forall x \in (a;b)$$

кері жағдайда, сызықты тәуелсіз деп аталады.

Мысал 6.

а) $y_1 = x,\quad y_2 = x^2,\quad y_3 = 3x,\quad y_4 = 2x - x^2$ - функциялары $(-\infty;\infty)$ аралығында сызықты тәуелді, себебі:

1) $\alpha_1 = -3\ ,\alpha_2 = 0\ ,\alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0 \Rightarrow -3y_1 + 0\cdot y_2 + y_3 + 0\cdot y_4 = -3y_1 + y_3 = -3x + 3x \equiv 0 \Rightarrow y_3 = 3y_1$,

2) $\alpha_1 = -2\ ,\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 1 \Rightarrow -2y_1 + y_2 + y_4 = -2x + x^2 + (2x - x^2) \equiv 0 \Rightarrow y_4 = 2y_1 - y_2$.

б) $1,\ x,\ x^2$ функциялары $(-\infty;\infty)$ аралығында сызықты тәуелсіз, себебі $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0$ теңдігі барлық x үшін емес, тек x -тің екі мәні үшін ғана орынды.

Сызықты тәуелді $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функцияларының $(n-1)$ - ші ретке дейінгі туындылары бар болса, онда олар Вронский анықтауышы деп аталатын:

$$W[y_1; y_2; \ldots; y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$ анықтауыш көмегімен анықталады.

Теорема 2. Егер $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялары $(a;b)$, аралығында сызықты тәуелді болса, онда осы $(a;b)$ аралығында $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv 0$.

Теорема 3. Егер (2) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(a;b)$ аралығында сызықты тәуелсіз функциялар болса, онда $\forall x \in (a\ ;\ b)$: $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$.

Анықтама 3. Кез келген (2) теңдеуінің n сызықты тәуелсіз дербес шешімдер жүйесі фундаментальдық шешімдер жүйесі деп аталады.

Теорема 4. (2) дифференциалдық теңдеуінің әрқашанда фундаменталдық шешімдер жүйесі табылады.

Теорема 5. Егер $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - (2) теңдеуінің дербес шешімдері болса, онда

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{3}$$

мұндағы $C_i,\ i = \overline{1,n}$ - кез келген тұрақтылар және бұл да (2) теңдеуінің шешімі болады.

(3) шешімінде n тұрақты бар. Қандай шарт орындалғанда (3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болады.

Теорема 6. Егер (2) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1, y_2, \ldots, y_n$ фундаменталдық шешімдер жүйесін құраса, онда (3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болады.

Мысал 7. e^{x}, e^{-x}, e^{2x} функциялар жүйесі $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ теңдеуінің фундаментальдық шешімдер жүйесі болатынын көрсет және оның жалпы шешімін жаз.

Шешуі: $y_1 = e^{x}, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{2x}$ функциялары мен оның туындыларын берілген теңдеуге қою арқылы олар теңдеудің шешімі болатынына көз жеткізуге болады. Оның вронскианы:

$$W\left(e^{x}, e^{-x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} & e^{2x} \\ e^{x} & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^{x} & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{x}e^{-x}e^{2x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0 .$$

Ендеше, e^{x}, e^{-x}, e^{2x} сызықты тәуелсіз функциялар және берілген теңдеудің фундаментальдық шешімдер жүйесін құрайды. Оның жалпы шешімі (4) формуласына сәйкес:

$$\tilde{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} .$$

Мысал 8. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x + 1$ теңдеуінің жалпы шешімін жаз, егер оның дербес шешімдерінің біреуі $y^* = x + 1$ функциясы болса.

Шешуі: Сәйкес біртекті дифференциал теңдеудің жалпы шешімі $\tilde{y}$ 2-мысалда табылған, онда теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \tilde{y} + y^* \Rightarrow y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + x + 1 .$$

Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі.

Теорема 7. (1) теңдеуінің жалпы шешімі осы теңдеудің дербес шешімі мен оған сәйкес (2) біртекті теңдеуінің жалпы шешімінің қосындысына тең.

Ендеше, (1) теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін :

1) (2) біртекті теңдеуінің жалпы шешімін,
2) (1) теңдеуінің дербес шешімін

табу қажетті.

Тұрақты шаманы вариациялау әдісі (2) теңдеуінің жалпы шешімі белгілі болғанда (1) теңдеуінің дербес шешімін табу үшін қолданылады.

(3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болсын. (1) теңдеуінің дербес шешімін (3) түрінде іздейміз, C_i, $i = \overline{1, n}$ -ді x -ке тәуелді белгісіз функция деп қарастырамыз. Шешімді табу үшін n шарт қажет. Осы шарттар ретінде мына $(n-1)$ шарт

$$y^{(i)} = C_1 y_1^{(i)} + C_2 y_2^{(i)} + \ldots + C_n y_n^{(i)}, \quad i = \overline{1, n-1} \tag{4}$$

пен (1) теңдеуін (3) қанағаттандыратын шартты аламыз. (4)-тен $y^{(i)}$ -ді, мұндағы $i = \overline{1, n-1}$, анықтайтын өрнекте C_i, $i = \overline{1, n}$ функциясының туындысы болмауы қажет екенін көруге болады. $C_i(x)$ мынадай жүйе көмегімен анықталады:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} , \tag{5}$$

бұл n белгісіз C_i' -ке тәуелді сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі. Теңдеулер жүйесінің анықтауышы фундаменталдық шешімдер жүйесі $y_i(x)$ нөлден өзгеше болатын жағдайдағы Вронский анықтауышы. Сондықтан, (5) жүйесінің тек бір ғана шешімі бар:

$C_i'(x) = \varphi_i(x)$. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу болатын соңғы теңдіктің екі жағын да интегралдап, $C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx$ табамыз.

Сонымен, (1) теңдеуінің дербес шешімі:

$$y^* = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx + ... + y_n \int \varphi_n(x). \quad (6)$$

Мысал 9. Теңдеудің жалпы шешімін тап:

$$y'' - \frac{y'}{x} = x \quad (7)$$

Шешуі.

1) $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ біртекті теңдеуінің жалпы шешімін тап.

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \Rightarrow ln\ y' = ln\ x + ln\ 2C_1 \Rightarrow y' = 2C_1 x \Rightarrow \tilde{y} = C_1 x^2 + C_2.$$

2) (7) теңдеуінің дербес шешімін табамыз. Шешімді $y = C_1(x) \cdot x^2 + C_1(x)$ түрінде іздейміз. Онда $y' = 2C_1 x + C_1' x^2 + C_2'$. y' өрнегі C_1' пен C_2' арқылы өрнектелмеуі керек болғандықтан, $C_1' x^2 + C_2' = 0$ деп аламыз, яғни, $y' = 2C_1 x$. y-ті (5)-ке қойып, екінші шартты табамыз. $y'' = 2C_1 + 2C_1' x$ болғандықтан, $2C_1 + 2C_1' x - \frac{2C_1 x}{x} = x \Rightarrow 2C_1' = 1$.

$C_1(x)$ мен $C_2(x)$ -ні табу үшін:

$$\begin{cases} C_1' = \frac{1}{2} \\ C_1' x^2 + C_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}x + C_3 \\ C_2' = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}x + C_3 \\ C_2 = -\frac{1}{6}x^3 + C_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\{ \ |C_3 = C_4| \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}x \\ C_2 = -\frac{1}{6}x^3 \end{cases}.$$

Сонымен, теңдеудің дербес шешімі $y^* = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3}$, ал жалпы шешімі – $y = C_1 x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}$.

Мысал 10.

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \quad (8)$$

теңдеуінің жалпы шешімін тап.

Шешуі. (8) теңдеуіне сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

(8) теңдеуінің жалпы шешімін алу үшін, Лагранж әдісін қолданып оның y^* дербес шешімін табамыз. (5) формуласына сәйкес:

$$y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)e^{2x}.$$

Біздің жағдайымызда (5) жүйесі мына түрде болады:

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-x} + C_3'e^{2x} = 0 \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} + 2C_3'e^{2x} = 0 \\ C_1'e^x + C_2'e^{-x} + 4C_3'e^{2x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases} \tag{9}$$

Оның анықтауышы $W = -6e^{2x} \neq 0$. (9) жүйесін Крамер ережесін қолданып шешсек:

$$C_1' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{e^x + 1}; \quad C_2' = \frac{1}{6} \cdot \frac{e^{3x}}{e^x + 1}; \quad C_3' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^x + 1}. \tag{10}$$

(10)-ды интегралдап, мына теңдіктерді аламыз:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(e^x + 1\right)}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\ln\left(e^x + 1\right);$$

$$C_2 = \frac{1}{6}\int \frac{e^{3x}dx}{e^x + 1} = \frac{1}{6}\int \frac{e^{2x}d\left(e^x\right)}{e^x + 1} = \frac{1}{6}\int \left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1}\right)de^x;$$

$$C_3 = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{e^x + 1} = \frac{1}{3}\int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1}dx = \frac{1}{3}\int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1}\right)dx = \frac{1}{3}\left(x - \int \frac{d\left(e^x + 1\right)}{e^x + 1}\right) = \frac{1}{3}\left(x - \ln\left(e^x + 1\right)\right)$$

Онда (8) теңдеуінің дербес шешімі:

$$y^* = -\frac{1}{2}e^x\ln\left(e^x + 1\right) + \frac{1}{6}e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + \ln\left(e^x + 1\right)\right) + \frac{1}{3}e^{2x}\left(x - \ln\left(e^x + 1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{12}e^x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}xe^{2x} + \left(\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}\right)\ln\left(e^x + 1\right).$$

Ал, (8) теңдеуінің жалпы шешімі:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{2}\left(4xe^{2x} + e^x - 2\right) + \frac{1}{6}\left(e^{-x} - 3e^x - 2e^{2x}\right)\ln\left(e^x + 1\right).$$